Chapitre 3

Formes quadratiques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

3.1 Définitions

3.1.1 Formes bilinéaires symétriques

On rappelle qu'une *forme bilinéaire symétrique* sur E est une application $\varphi\colon E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire pour tout $x \in E$ et $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$ (voir la définition 1.1.1 au tout début du cours).

Soient $\mathcal{E}$ une base de E, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et $A = \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E})$, i.e.,

$$\mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \cdots & \varphi(e_n, e_n). \end{pmatrix}$$

Si $x, y \in E$ ont pour matrices X et Y dans la base $\mathcal{E}$, on a vu que

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY = {}^tYAX.$$

♦ **Exercice 34.** Soient $\mathcal{F}$ une autre base de E et $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. Exprimer la matrice B de φ dans la base $\mathcal{F}$ en fonction de A et P.

Dans les chapitres précédents, nous avons essentiellement étudier le cas où φ est un produit scalaire sur E. Nous allons dans ce chapitre considérer d'autres cas.

3.1.2 Définition

Définition 3.1.1. *Une application $Q\colon E \to \mathbb{K}$ est appelée une* **forme quadratique** *(sur E) s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que*

$$\forall\, x \in E, \quad Q(x) = \varphi(x, x).$$

On note $\mathcal{Q}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ constitué des formes quadratiques.

♦ **Exercice 35.** Vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

♦ **Exercice 36.** Soient Q une forme quadratique sur E, et φ une forme bilinéaire symétrique sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. Montrer la ***formule de polarisation*** :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x, y) - Q(x) - Q(y)). \tag{3.1.1}$$

2) En déduire qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$, qu'on appelle la ***forme polaire de*** Q.

Remarques. 1) Si φ est la forme polaire de Q, on a aussi la formule

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)). \tag{3.1.2}$$

2) Lorsque φ est un produit scalaire, alors Q est une norme sur E (cf. Théorème 1.3.2).

♦ **Exercice 37.** Donner des exemples de formes quadratiques qui ne soient pas issues de produits scalaires.

Compte tenu de l'exercice précédente on adopte pour les formes quadratiques la terminologie des formes bilinéaires symétriques. En particulier, on appelle ***matrice de*** Q ***dans une base*** $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ ***de*** E, la matrice de sa forme polaire φ dans cette base. On la note $\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E})$. Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \cdots & \varphi(e_n, e_n). \end{pmatrix}$$

Exercice 27. On suppose $\dim E = 2$. Soit (e_1, e_2) une base de E. Pour $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, on pose :

$$\varphi_1(x, y) = \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \ , \ \varphi_2(x, y) = (\lambda_1 + 3\lambda_2)(3\mu_1 + \mu_2),$$
$$\varphi_3(x, y) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 \ , \ \varphi_4(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

1) Déterminer les applications φ_k qui sont des formes bilinéaires sur E.
2) Écrire les matrices $(\varphi_k(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$. Quelles sont les formes φ_k qui sont symétriques ? Symétriques non dégénérées ?
3) Soit $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$, avec $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 - e_1$. Écrire la matrice $(\varphi_k(f_i, f_j))_{1 \leq i,j \leq 2}$.

3.1.3 Expression analytique d'une forme quadratique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose dans ce paragraphe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $E = \mathbb{R}^n$
Soient Q est une forme quadratique, φ sa forme polaire et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Posons pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = \varphi(e_1, e_j)$. Alors pour tous $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = \sum_{j=1}^n y_j e_j = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E, on a

$$\varphi(u, v) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j a_{i,j}$$

et

$$Q((x_1,\dots,x_n)) = Q(u) = \varphi(u,u) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2}_{\text{termes carrés}} + 2 \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j a_{i,j}}_{\text{termes rectangulaires}}.$$

Ainsi, l'application $(x_1,\dots,x_n)\mapsto Q((x_1,\dots,x_n))$ est un polynôme *homogène*, i.e., $\forall\,\lambda\in\mathbb{K}$, $Q(\lambda u)=\lambda^2 Q(u)$, dont tous les monômes sont des polynômes homogènes de degré 2.

⚠ **Attention** : on note ici $(x_1,\dots,x_n)$ un élément de $E=\mathbb{R}^n$; cela ne signifie pas que Q est une fonction de n variables, d'où les doubles parenthèses ! Dans la suite, on notera simplement $Q(x_1,\dots,x_n)$ pour $Q((x_1,\dots,x_n))$ lorsque $E=\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si Q est un tel polynôme, alors il existe des scalaires $a_{i,j}\in\mathbb{K}$, pour $i,j\in\{1,\dots,n\}$, tels que pour tout $x\in E$,

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j a_{i,j},$$

et Q est une forme quadratique dont la forme polaire est donnée par

$$\forall\, u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \forall\, v=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\in E,\qquad \varphi(u,v)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j a_{i,j}.$$

En conclusion, nous avons montré :

Proposition 3.1.2. *Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ sont les applications polynômes dont tous les monômes sont des polynômes homogènes de degré 2.*

Exemple. Une forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$Q(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx,$$

avec $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$.

⚠ **Attention** : de nouveau, $Q(x,y,z)$ signifie en toute rigueur $Q((x,y,z))$.

La matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}(\varphi;\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix},$$

et

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = axx'+byy'+czz'+\frac{d}{2}(xy'+yx')+\frac{e}{2}(yz'+zy')+\frac{f}{2}(zx'+xz').$$

3.2 Orthogonalité

Définition 3.2.1. *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.*

(i) *Deux vecteurs x,y de E sont dits* **φ-orthogonaux***, ou* **orthogonaux pour** *φ, si $\varphi(x,y)=0$.*

(ii) *Un vecteur x de E est dit* **φ-isotrope** *ou* **isotrope pour** *φ, si $\varphi(x,x)=0$.*

(iii) *Des parties F et G de E sont dites* φ-**orthogonales** *ou* **orthogonales pour** φ*, si* $\varphi(x,y)=0$ *pour tout* $(x,y)\in F\times G$*.*

Si F est un sous-espace de E, on appelle φ***-orthogonal*** de F le sous-espace F° de E constitué des vecteurs $x\in E$ tels que $\varphi(x,y)=0$ pour tout $y\in F$. Le φ-orthogonal E° de E est appelé le ***noyau*** de φ, et on le note $\ker\varphi$ i.e.,

$$\ker\varphi=\{x\in E\mid \varphi(x,y)=0\,\forall\, y\in E\}.$$

Le ***cône isotrope*** $\mathcal{C}_\varphi$ de φ est l'ensemble des vecteurs isotropes de E :

$$\mathcal{C}_\varphi=\{x\in E\mid \varphi(x,x)=0\}.$$

⚠ **Attention** : on note $\ker\varphi$ bien que φ ne soit pas une application linéaire ; c'est toutefois, comme le noyau d'une application linéaire, un sous-espace vectoriel de E.

⚠ **Attention** : on prendra garde au fait qu'en général, $\mathcal{C}_\varphi$ n'est <u>pas</u> un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. Le cône isotrope $\mathcal{C}_\varphi$ d'une forme quadratique est un « cône » au sens où pour tout $\lambda\in\mathbb{K}\smallsetminus\{0\}$, si $x\in\mathcal{C}_\varphi$, alors $\lambda x\in\mathcal{C}_\varphi$.

♦ **Exercice 38.** 1) Donner des exemples de formes quadratiques où

a) le cône isotrope est un sous-espace vectoriel de E ;

b) le cône isotrope n'est <u>pas</u> un sous-espace vectoriel de E ;

c) le cône isotrope est réduit à $\{0_E\}$.

2) Dans le cas général, comparer $\mathcal{C}_\varphi$ et $\ker\varphi$.

Définition 3.2.2. *Soit φ une forme bilinaire symétrique sur E et $\mathcal{X}=(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de E.*

(i) *On dit que $\mathcal{X}$ est* φ-**orthogonale** *si $\varphi(x_i,x_j)=0$ pour $i,j\in\{1,\dots,p\}$ et distincts.*

(ii) *On dit que $\mathcal{X}$ est* φ-**orthonormée** *si elle est φ-orthogonale et si $\varphi(x_i,x_i)=1$ pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$.*

Définition 3.2.3. *On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur E est* **dégénérée** *(resp.* **non dégénérée***) si $E^\circ\neq\{0\}$ (resp. $E^\circ=\{0\}$).*

Soient Q une forme quadratique sur E, et φ sa forme polaire. On rappelle (cf. exercice 34) que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases de E, alors

$$\mathrm{Mat}(Q;\mathcal{F})={}^tP\,\mathrm{Mat}(Q;\mathcal{E})\,P,$$

où $P=P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$.

⚠ **Attention** : pour une application linéaire f, la formule de changement base est $\mathrm{Mat}(f;\mathcal{F})=P^{-1}\,\mathrm{Mat}(f;\mathcal{E})\,P$!

Remarques. 1) On dit que deux matrices $A,A'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ***congruentes*** s'il existe une matrice inversible $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A'={}^tPAP$. Ainsi, deux matrices <u>symétriques</u> A et A' sont congruentes si et seulement si elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes.

2) Si $A,A'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont congruentes alors $\det(A')=(\det P)^2\det(A)$ pour une certaine matrice inversible $P\in GL_n(\mathbb{K})$. Si Q est une forme quadratique sur E, le signe de $\det\mathrm{Mat}(Q;\mathcal{E})$ ne dépend donc pas de la base $\mathcal{E}$ choisie.

3.3 Bases orthogonales

Soit Q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Question. Existe-t-il des bases φ-orthogonales de E ? Autrement dit, existe-t-il une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}(Q; \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$? Si oui, comment construire en pratique de telles bases ?

On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des *formes linéaires* sur E, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel de dimension $n \times 1 = n$ appelé le ***dual*** de E.

♦ **Exercice 39.** * Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\ell_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j; \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

(*Indication.* On pourra montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.). La base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est appelée la ***base duale*** de $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.

On admet le théorème suivant :

Théorème-Définition 3.3.1. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée. On suppose que Q est <u>non nulle</u>. Alors E possède des bases φ-orthogonales. Précisément, il existe une base $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ de E^* et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i^2 \,,$$

et la base duale de $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est une base φ-orthognale. De manière équivalente, il existe p formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_p$ sur E, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, et p scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ <u>non nuls</u> tels que

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ell_i^2.$$

On admet que l'entier p ne dépend pas de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ choisie vérifiant les conditions ci-dessus ; on l'appelle le **rang** *de Q (ou de φ). Par convention, le rang de la forme quadratique nulle est 0.*

♦ **Exercice 40.** Justifier que les deux dernières assertions du théorème sont équivalentes à la première.

Remarque. Dans les notations du théorème, on a, pour tous $x, y \in E$,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i(x) \ell_i(y).$$

3.4 Formes quadratiques réelles

Dans tout ce paragraphe, $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

3.4.1 Loi d'internie de Sylvester

Définition 3.4.1. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique, et Q la forme quadratique associée à φ.*

(i) *On dit que Q (ou φ) est* **positive** *(resp.* **négative***) si $Q(x) \geqslant 0$ (resp. $Q(x) \leqslant 0$) pour tout vecteur x de E.*

(ii) *On dit que Q (ou φ) est* **définie positive** *(resp.* **définie négative***) si $Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$) pour tout vecteur* non nul *x de E.*

Théorème-Définition 3.4.1 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Soient φ une forme bilinéaire symétrique non nulle sur E et Q la forme quadratique associée.*

(i) *Il existe des entiers s et t, avec $1 \leqslant s+t \leqslant n$ et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :*

$$Q(x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 - \sum_{i=s+1}^{t} \lambda_i^2.$$

(ii) *On a $s + t = \operatorname{rang}(\varphi)$ et les entiers s et t sont définis comme suit : s (resp. t) est le maximum des dimensions des sous-espaces F de E tels que $\varphi|_{F\times F}$ soit définie positive (resp. définie négative).*

On dit que le couple (s, t) est la **signature** *de φ.*

> ***James Joseph Sylvester****, né le 3 septembre 1814 et mort le 13 mars 1897 à Londres, est un mathématicien et géomètre anglais.*

♦ **Exercice 41.** Démontrer l'assertion (i) de ce théorème. On admettra l'assertion (ii).

Le théorème suivant fait le lien avec le chapitre précédent. Il est parfois appelé le théorème de *diagonalisation simultanée* :

Théorème 3.4.2. *Soient E un espace euclidien de dimension finie non nulle et φ une forme bilinéaire symétrique (réelle). Il existe une base de E à la fois orthonormée et φ-orthogonale.*

♦ **Exercice 42.** * Démontrer ce théorème à l'aide du Théorème fondamental.

3.4.2 Orthogonalisation effective

Il faut retenir la démonstration du résultat suivant qui est connue sous le nom de ***procédé d'orthogonalisation de Gauss***.

> **Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Théorème 3.4.1. *Soit Q une forme quadratique sur E. Il existe une décomposition de Q en combinaison linéaire, à coefficients éventuellement nuls, de carrés de $n = \dim E$ formes linéaires indépendantes.*

Il ne s'agit que d'une reformulation du théorème 3.3.1 mais nous allons ici en donner une démonstration en construisant de manière explicite ces formes linéaires indépendantes. Cela nous permettra en particulier de déterminer en pratique la signature d'une forme quadratique.

Démonstration. Soit φ la forme polaire de Q. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E, le cas où $n = 1$ étant clair. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(\varphi; \mathcal{E})$.
Pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, il vient :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

• Supposons qu'il existe un indice i tel que $a_{ii} \neq 0$. Par exemple, $a_{11} \neq 0$. Posons

$$f_1(x) = a_{11}\lambda_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\lambda_j.$$

Alors :

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}}(f_1(x))^2 + R(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i),$$

où R est une forme quadratique sur $F = \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires indépendantes $g_2, \ldots, g_n$ sur F et des scalaires $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que :

$$R = \alpha_2 g_2^2 + \cdots + \alpha_n g_n^2.$$

Prolongeons g_i en un élément $f_i \in E^*$, en posant :

$$f_i(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = g_i(\lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n).$$

Il est immédiat que $f_1, \ldots, f_n$ sont indépendants. Posant $\alpha_1 = a_{11}^{-1}$, il vient :

$$Q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_n f_n^2.$$

• On suppose $a_{ii} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Le résultat étant clair pour $Q = 0$, nous supposerons, par exemple, $a_{12} \neq 0$. On a cette fois :

$$Q(x) = 2(a_{12}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 \sum_{i=3}^{n} a_{1i}\lambda_i + \lambda_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\lambda_j + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j).$$

Posons :

$$h_1(x) = \lambda_1 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{i=3}^{n} a_{2i}\lambda_i \ , \ h_2(x) = \lambda_2 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{i=3}^{n} a_{1i}\lambda_i.$$

Alors :

$$Q(x) = 2a_{12}h_1(x)h_2(x) + R(\lambda_3 e_3 + \cdots + \lambda_n e_n),$$

où R est une forme quadratique sur $F = \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. En remarquant que $4h_1h_2 = (h_1 + h_2)^2 - (h_1 - h_2)^2$, et en posant $f_1 = h_1 + h_2$, $f_2 = h_1 - h_2$, on termine alors comme dans le cas précédent en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Exemple. Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx.$$

Appliquant la méthode de Gauss, il vient :

$$Q(x,y,z) = (x-y-z)^2 - 4yz = (x-y-z)^2 + (y-z)^2 - (y+z)^2.$$

On en déduit que la forme est de rang 3, de signature $(2,1)$, et qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}(Q;\mathcal{F}) = \mathrm{diag}(1,1,-1).$$

Exercice 28. Pour $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = P(1)Q(1)$. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son noyau et son rang. Déterminer une base φ-orthogonale de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 29. On suppose $\dim E = 2$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de E, et φ une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\mathrm{Mat}(\varphi;\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $F = \mathbb{K}e_1$, $G = \mathbb{K}e_2$. Déterminer $(F \cap G)^\circ$ et $F^\circ + G^\circ$.

Exercice 30. Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique. Cette forme est-elle non-dégénérée ?

2) Montrer que toute matrice symétrique est φ-orthogonale à toute matrice anti-symétrique.

3) Quelle est la signature de φ ?

Exercice 31. Par la méthode de Gauss, déterminer les signatures des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ données par :

a) $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx)$.

b) $Q(x,y,z) = 2x^2 + 6y^2 - 4xy + 8xz$.

c) $Q(x,y,z) = xy + yz + 2zx$.

d) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy$.

e) $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$.

f) $Q(x,y,z) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$.

g) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 2xy$.

h) $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 2xz\cos\gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 32. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Étudier la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $X\,{}^tX$.

3.5 Coniques

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.5.1 Généralités

On muni $\mathbb{R}^2$ d'une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, et on se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ où O est le point 0_E de l'espace affine $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.5.1. *On appelle* **conique** *de $\mathbb{R}^2$ toute courbe Γ admettant dans le repère $\mathcal{R}$ une équation de la forme $F(x, y) = 0$, où*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Autrement dit, une courbe Γ est une conique de $\mathbb{R}^2$ s'il existe une forme quadratique Q, de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, et une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{R}^2$, définie par $\ell(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = dx + ey$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = Q(x, y) + \ell(x, y) + f.$$

Remarques. 1) Posons $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. L'équation F de la conique s'écrit également sous forme matricielle :

$$^tXAX + 2LX + f = 0.$$

2) Le terme $^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2$ est appelé la ***partie quadratique*** de l'équation F de la conique et le terme $2L = 2dx + 2ey$ est appelé la ***partie linéaire*** de l'équation F de la conique.
3) Si F est une équation de la conique Γ, alors λF est encore une équation de la conique Γ pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4) Le cône isotrope d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ est en particulier une conique.

Soit désormais Γ une conique de $\mathbb{R}^3$ d'équation F.

Définition 3.5.2. *On dit que le point $M_0 = (x_0, y_0)$ est un* **centre de symétrie** *de Γ si*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x - x_0, y - y_0) \in \Gamma \iff (-x + x_0, -y + y_0) \in \Gamma,$$

ou encore si

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \qquad M \in \Gamma \iff M' \in \Gamma,$$

où M' désigne le symétrique de M par rapport au point M_0.

Proposition 3.5.3. *Le point (x_0, y_0) est un centre de symétrie de la conique Γ si et seulement si*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) & = & 0 \end{cases} \quad \textit{soit encore} \quad \begin{cases} ax_0 + by_0 = -d \\ bx_0 + cy_0 = -e \end{cases} \quad \textit{ou encore} \quad A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.5.4. *La conique Γ admet un unique centre de symétrie si et seulement si $\det A = ac - b^2 \neq 0$. Dans ce cas, on dit que Γ est une* **conique à centre**.

♦ **Exercice 43.** Démontrer la proposition et le corollaire.

Objectif : rechercher un repère orthornormé de $\mathbb{R}^2$ dans lequel la conique Γ admette une équation plus simple, appelée ***équation réduite.***

3.5.2 Méthode de réduction

On conserve les notations précédentes. La matrice A étant symétrique réelle, il existe d'après le Théorème fondamental une matrice orthogonale $P \in O(2)$ telle que

$$ {}^tP A\, P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, $$

et dans ce cas, $\det A = \lambda\mu$.

Premier cas : $\underline{\det A = \lambda\mu \neq 0}$

Dans ce cas, on sait que Γ admet un unique centre de symétrie Ω dont on peut calculer les coordonnées (x_0, y_0).

Proposition 3.5.5. *Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ une base orthogonale de vecteurs propres de A. L'équation de la conique Γ dans le repère $(\Omega, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ est de la forme*

$$ \lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + k = 0, \qquad \textit{avec} \quad k = F(x_0, y_0). $$

- Cas $\det A = \lambda\mu > 0$:
  - $*$ k est du signe de λ et μ : $\Gamma = \varnothing$;
  - $*$ $k = 0$: $\Gamma = \{\Omega\}$;
  - $*$ k est du signe opposé à λ et μ : Γ est une ***ellipse***.

- Cas $\det A = \lambda\mu < 0$:
  - $*$ $k = 0$: Γ est la réunion de deux droites sécantes ;
  - $*$ $k \neq 0$: Γ est une ***hyperbole***.

Deuxième cas : $\underline{\det A = \lambda\mu = 0}$

Dans ce cas, l'une des valeurs propres est nulle, par exemple $\mu = 0$ (l'une seulement car $A \neq 0$).

Proposition 3.5.6. *Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ une base orthogonale de vecteurs propres de A. L'équation de la conique Γ dans le repère $(O, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ est de la forme*

$$ \lambda x_1^2 + 2d_1x_1 + 2e_1y_1 + f_1 = 0. $$

On écrit cette équation sous forme canonique :

$$ \lambda \left(x_1 + \frac{d_1}{\lambda} \right)^2 + 2e_1y_1 + f_1' = 0. $$

- Cas $e_1 = 0$:
  - $*$ $\lambda f_1' > 0$: $\Gamma = \varnothing$;
  - $*$ $f_1' = 0$: Γ est une droite (double) ;
  - $*$ $\lambda f_1' < 0$: Γ est la réunion de deux droites parallèles disctinctes.

- Cas $e_1 \neq 0$: Γ est une ***parabole***. L'équation de Γ s'écrit

$$ \lambda \left(x_1 + \frac{d_1}{\lambda} \right)^2 + 2e_1 \left(y_1 - \frac{f_1'}{2e_1} \right) = 0. $$

En prenant $\Omega = (-\frac{d_1}{\lambda}, \frac{f_1'}{2e_1})$ comme nouvelle origine du repère, l'équation de Γ devient :

$$ \lambda x_2^2 + 2e_1y_2 = 0. $$

3.5.3 Bilan de la classification

Proposition 3.5.7. 1) *Si* $\det A = ac - b^2 > 0$*, alors* Γ *est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.*
2) *Si* $\det A = ac - b^2 < 0$*, alors* Γ *est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.*
3) *Si* $\det A = ac - b^2 = 0$*, alors* Γ *est une parabole, la réunion de deux droites parallèles distinctes, une droite ou l'ensemble vide.*

3.6 Quadriques

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.6.1 Généralités

On muni $\mathbb{R}^3$ d'une base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, et on se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni du repère $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ où O est le point 0_E de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.6.1. *On appelle* **quadrique** *de* $\mathbb{R}^3$ *toute surface* Σ *admettant dans le repère* $\mathcal{R}$ *une équation de la forme* $F(x, y, z) = 0$*, où*

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2iz + j,$$

avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$ *tels que* $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$*. Autrement dit, une surface* Σ *est une quadrique de* $\mathbb{R}^3$ *s'il existe une forme quadratique* Q*, de matrice* $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ *dans la base* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$*, et une forme linéaire* ℓ *sur* $\mathbb{R}^3$*, définie par* $\ell(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = gx + hy + iz$ *pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, telles que*

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = Q(x, y, z) + \ell(x, y, z) + j.$$

Remarques. 1) Posons $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. L'équation de la quadrique s'écrit également sous forme matricielle :

$${}^tXAX + 2LX + j = 0.$$

2) Le terme ${}^tXAX = ax^2 + by^2 + cz^2$ est appelé la ***partie quadratique*** de l'équation F de la quadrique et le terme $2L = 2gx + 2hy + 2iz$ est appelé la ***partie linéaire*** de l'équation F de la quadrique.
3) Comme pour les coniques, si F est une équation de la quadrique Σ, alors λF est encore une équation de la quadrique Σ pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.
4) Le cône isotrope d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ est en particulier une quadrique.

Soit désormais Σ une quadrique de $\mathbb{R}^2$ d'équation F.

Proposition 3.6.2. *Le point* (x_0, y_0, z_0) *est un centre de symétrie de la conique* Σ *si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{soit encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} ax_0 + dy_0 + fz_0 = -g \\ dx_0 + by_0 + ez_0 = -h \\ fx_0 + ey_0 + cz_0 = -i \end{array} \right. \quad \textit{ou encore} \quad A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ -h \\ -i \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.6.3. *La quadrique Σ admet un unique centre de symétrie si et seulement si* $\det A \neq 0$. *Dans ce cas, on dit que Σ est une* **quadrique à centre**.

3.6.2 Méthode de réduction

1) Réduction de la partie quadratique

La matrice A étant symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale $P \in O(3)$ telle que

$$^{t}PA\,P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu; \nu \in \mathbb{R}.$$

La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale de vecteurs propres $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de $\mathbb{R}^3$. Dans le repère $(O, (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, l'équation de la quadrique ne présente plus de termes en xy, yz et zx.

1) Réduction de la partie linéaire

On effectue ensuite un changement d'origine de façon à supprimer certains termes de la partie linéaire en utilisant des factorisations de la forme :

$$ax^2 + 2bx = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}.$$

On est alors en présence d'une quadrique dont l'équation est réduite.

3.6.3 Quadriques de référence

Pour reconnaitre une quadrique de « référence », on s'interesse aux *sections planes de la quadrique* c'est-à-dire aux intersections de la quadrique avec des plans : on peut montrer qu'il s'agit de coniques.

- **Ellipsoïde :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad \text{avec } a, b, c > 0.$$

- **Hyperboloïde à une nappe :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =} \qquad \text{avec } a, b, c > 0.$$

- **Hyperboloïde à deux nappes :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1} \qquad \text{avec } a, b, c > 0.$$

- **Paraboloïde elliptique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Paraboloïde hyperbolique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Cône :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0} \qquad \text{avec } a, b, c > 0.$$

- **Cylindre elliptique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Cylindre hyperbolique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{avec } a, b > 0.$$

- **Cylindre parabolique :** quadrique Σ d'équation

$$\boxed{x^2 = 2ay} \qquad \text{avec } a > 0.$$

♦ **Exercice 44.** Pour chaque quadrique de référence Σ, décrire l'intersection de Σ avec un plan (sécant à Σ) : quelle est la nature de cette conique ? Discuter les différents cas.

Remarque. Pour $a = b$, les quadriques suivantes sont des *surfaces de révolution* d'axe $\Omega + \mathbb{R}\mathbf{k}$:
- l'ellipsoïde ;
- l'hyperboloïde à une nappe ;
- l'hyperboloïde à deyx nappes ;
- le paraboloïde elliptique ;
- le cône ;
- le cylindre elliptique.

Exercice 33. Déterminer la nature des quadriques d'équations :

a) $11x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 16xy - 4xz - 20yz + 30x - 66y + 24z + 45 = 0$;

b) $2(x + y)(y - z) - 3x = 0$;

c) $2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2\sqrt{6}xy + 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{3}yz + \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y + 4z + 1 = 0$.

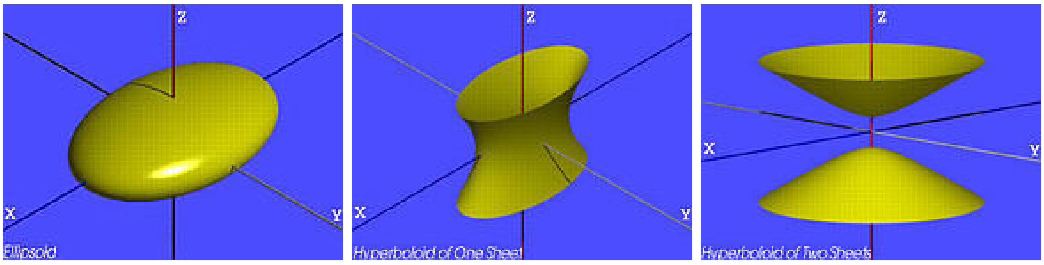

FIGURE 3.1 – Ellipsoide, hyperboloïde à une nappe et hyperboloïde à deux nappes

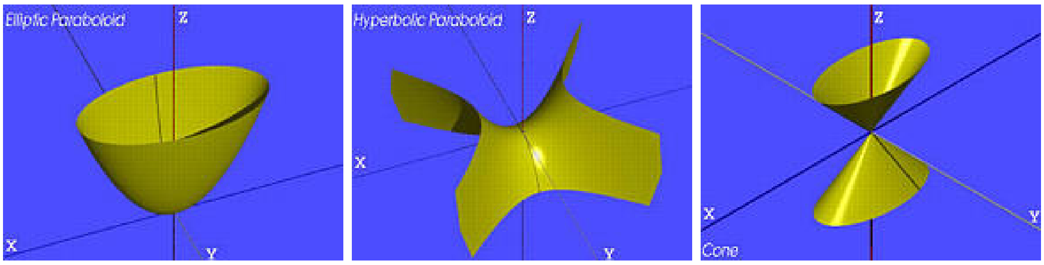

FIGURE 3.2 – paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique et cône

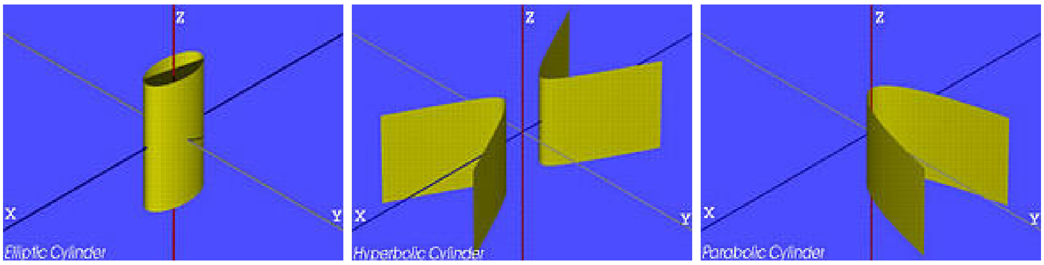

FIGURE 3.3 – Cylindre elliptique, cylindre hyperbolique et cylindre parabolique